11/4/19

Φυλλάδιο ②

1) $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική: $A = \{0\} \cup (3,4] \cup \{5\}$

α)

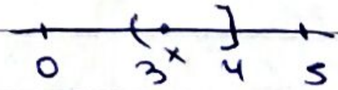
- → $A^\circ = (3,4)$
- → $\bar{A} = \{0\} \cup [3,4] \cup \{5\}$
- → $\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ = \{0,3,4,5\}$
- → $A' = [3,4]$

• $A^\circ \subseteq A$, $0 \notin A^\circ$ (διότι για κανένα $\varepsilon > 0$ δεν ισχύει $(0-\varepsilon, 0+\varepsilon) \subseteq A$)

• $5 \notin A^\circ$ (διότι για κανένα $\varepsilon > 0$ δεν ισχύει $(5-\varepsilon, 5+\varepsilon) \subseteq A$)

• $4 \notin A^\circ$ (δεν υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $(4-\varepsilon, 4+\varepsilon) \subseteq A$)

Αν $x \in (3,4)$

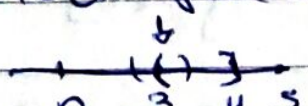


, για $\varepsilon = \min\{x-3, 4-x\}$

έχουμε $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq (3,4) \subseteq A$ και άρα $x \in A^\circ$

Επομένως $A^\circ = (3,4)$

→ $\bar{A} = \{0\} \cup [3,4] \cup \{5\}$ διότι $A \subseteq \bar{A}$, επίσης $3 \in \bar{A}$ διότι για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $(3-\varepsilon, 3+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$



[μια διαφορετική αιτιολόγηση: $3 + \frac{1}{n} \in A$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και $3 + \frac{1}{n} \to 3$ άρα

$3 \in \bar{A}$]

Το σύνολο $A \cup \{3\} = \{0\} \cup [3,4] \cup \{5\}$ είναι κλειστό διότι το συμπλήρωμα του είναι το σύνολο $(-\infty, 0) \cup (0,3) \cup (4,5) \cup (5,+\infty)$ είναι ανοικτό ως ένωση ανοικτών διαστημάτων]

Άρα $\bar{A} = A \cup \{3\} = \{0\} \cup [3,4] \cup \{5\}$

Εναλλακτικός τρόπος: Έστω $x \in \mathbb{R}$ με $x \notin \{0\} \cup [3,4] \cup \{5\}$
Θα δ.ο. $x \notin \bar{A}$

$0 \quad 3 \quad 4 \quad 5$

$\rightarrow A' = [3,4]$ διότι: $A' \subseteq \bar{A}$, $0 \notin A'$ διότι: $(B_p(0,1) \setminus \{0\}) \cap A = \emptyset$
$\overset{\parallel}{(-1,1)}$

Επίσης $5 \notin A'$ [διότι $(5-1, 5+1) \cap A = \{5\}$]

Για $x \in [3,4]$ για κάθε $\varepsilon > 0$, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$

$0 \quad 3 \quad 4 \quad 5$ Επομένως $A' = [3,4]$

$B = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

$\rightarrow B^o = \emptyset$
$\rightarrow \bar{B} = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$, διότι: $B \subseteq \bar{B}$, $0 \in \bar{B}$
$B \cup \{0\} = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$

Είναι κλειστό διότι το συμπλήρωμα του είναι το $(-\infty, 0) \cup (1,+\infty) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right)$ που είναι ανοικτό. Άρα $B \cup \{0\}$ είναι κλειστό

$\to \partial B = \bar{B} \setminus B^{\circ} = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \} \cup \{0\}$

$\to B' = \{0\}$, $0 \in B'$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{n} \notin B'$ διότι για

$\varepsilon = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ $\quad B_\rho(\frac{1}{n}, \varepsilon) \cap B = \{\frac{1}{n}\}$

$\Gamma = \mathbb{Q} \cap (0,1)$

$\to \Gamma^{\circ} = \emptyset$

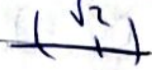
$\to \bar{\Gamma} = [0,1]$

$\to \partial \Gamma = \bar{\Gamma} \setminus \Gamma^{\circ} = [0,1]$

$\to \Gamma' = [0,1]$

$\Delta = \mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}\}$

$\to \Delta^{\circ} = \emptyset$

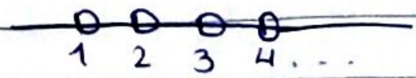


$\to \bar{\Delta} = \mathbb{R}$

$\to \partial \Delta = \bar{\Delta} \setminus \Delta^{\circ} = \mathbb{R}$

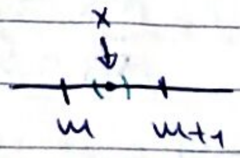
$\to \Delta' = \mathbb{R}$

β) $E \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $E' = \mathbb{N}$. Έστω $E = \{ m + \frac{1}{2^n} : m, n \in \mathbb{N} \}$



Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $x_n = m + \frac{1}{2^n}$ και

$x_n \in E$



$x_n \neq m \ \forall n$

$x_n \to m$ άρα $m \in E'$. Αν $x \in \mathbb{R}$ $x \geq 1$ και $x \notin \mathbb{N}$ τότε $\exists m$ τ.ω. $m < x < m+1$. Για $\varepsilon = \frac{1}{2} \min\{x-m, (m+1)-x\}$

το $B_\rho(x, \varepsilon) \cap E$ είναι πεπερασμένο άρα $x \notin E'$

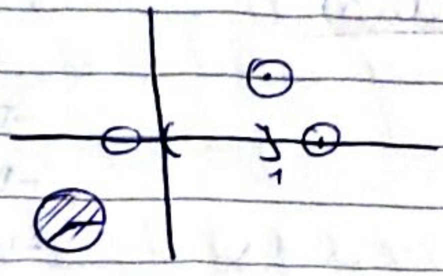
Για $x < 1$ εύκολα $x \notin E'$

δ) Εφόσον το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο.
$\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ άρα $\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{q_n\}$ με

$\{q_n\}$ κλειστό

$$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} = \mathbb{R}\setminus\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{q_n\}\Big) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{(\mathbb{R}\setminus\{q_n\})}_{\text{ανοιχτό}}$$

2) $(\mathbb{R}, \rho_2)$



$A = (0,1)\times\{0\}$

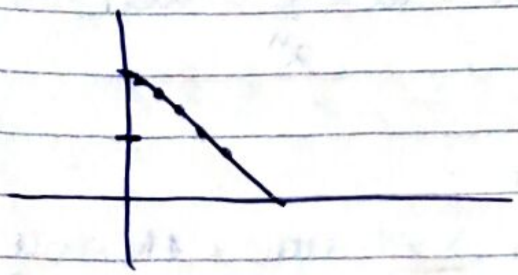
$A^\circ = \emptyset$

$\bar{A} = [0,1]\times\{0\}$

$\partial A = \bar{A}\setminus A^\circ = [0,1]\times\{0\}$

$A' = [0,1]\times\{0\}$

$$B = \left\{\left(\frac{1}{n}, 2-\frac{1}{n}\right) : n\in\mathbb{N}\right\}$$



$B^\circ = \emptyset$

$\bar{B} = \left\{\left(\frac{1}{n}, 2-\frac{1}{n}\right)\right\}\cup\{(0,2)\}$

$\partial B = \bar{B}\setminus B^\circ = \bar{B}$

$B' = \{(0,2)\}$

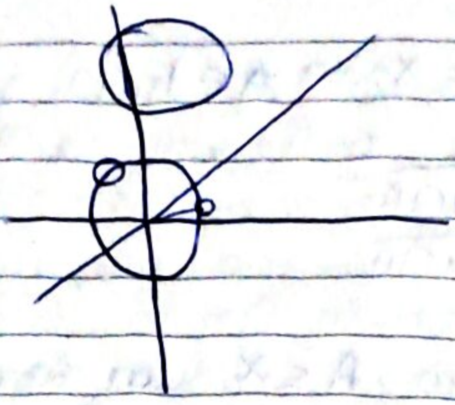
$\Gamma = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=2x\}$

$\Gamma^\circ = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$

$\bar{\Gamma} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R} : y=2x\}$

$\partial\Gamma = \bar{\Gamma}\setminus\Gamma^\circ = \{(x,y) : x^2+y^2=1\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=2x, x\in(-\infty,\frac{\sqrt{5}}{5})\cup(\frac{\sqrt{5}}{5},+\infty)\}$

$\Gamma' = \bar{\Gamma}$

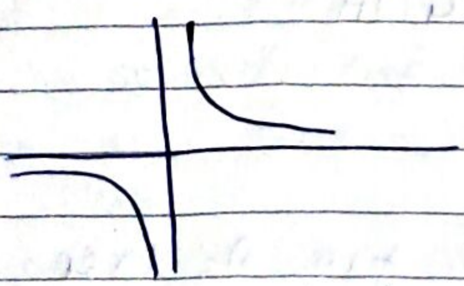


$\Gamma' = \bar{\Gamma}$

$\Delta = \{ (x, \frac{1}{x}) : x \neq 0 \} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1 \}$ Ν.δ.ο. το Δ κλειστό

Έστω $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία στοιχείων του Δ και $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ με $(x_n, y_n) \xrightarrow{\rho_2} (x,y)$. Τότε:

$\left. \begin{array}{l} x_n \to x \\ y_n \to y \end{array} \right\} \Rightarrow x_n y_n \to xy$



Εφόσον $(x_n, y_n) \in \Delta$ έχουμε $x_n y_n = 1$ $\forall n$ άρα η σταθ. ακολουθία 1 συγκλίνει στο xy άρα $xy = 1$ δηλ. $(x,y) \in \Delta$. Επομένως το Δ είναι κλειστό

3) (X, ρ) μ.χ. $A \subseteq X$ V: ανοιχτό $V \cap \bar{A} \neq \emptyset$ Να δ.ο. $V \cap A \neq \emptyset$

Αποδ: Έστω $x \in V \cap \bar{A}$ $x \in V$ και $x \in \bar{A}$. Εφόσον V ανοιχτό $\exists\, \varepsilon > 0 : B_\rho(x, \varepsilon) \subseteq V$. Εφόσον $x \in \bar{A}$ προκύπτει: $B_\rho(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ Άρα $V \cap A \neq \emptyset$

4) (X,ρ) μ.χ. $G \subseteq X$ ΤΑΕΙ

i) G: ανοιχτό

ii) $\forall A \subseteq X$ $\quad G\cap\bar{A} \subseteq \overline{G\cap A}$

iii) $\forall A \subseteq X$ $\quad \overline{G\cap\bar{A}} = \overline{G\cap A}$

Λύση: (i) ⇒ ii)) Έστω $A \subseteq X$ και έστω $x \in G\cap\bar{A}$ (και θα δ.ο. $x \in \overline{G\cap A}$) $x \in G$ και $x \in \bar{A}$

Έστω U ανοιχτό με $x \in U$ (και θα δ.ο. $U\cap G\cap A \neq \emptyset$)

Έχουμε ότι $G\cap U$ ανοιχτό (ως τομή δύο ανοιχτών)

και $x \in G\cap U$. Εφόσον $x \in \bar{A}$ έπεται ότι:

$(G\cap U)\cap A \neq \emptyset$ δηλ. $U\cap(G\cap A) \neq \emptyset$ Άρα $x \in \overline{G\cap A}$

(ii) ⇒ iii)) Έστω $A \subseteq X$. Από το ii): $G\cap\bar{A} \subseteq \overline{G\cap A}$ ⇒

⇒ $\overline{G\cap\bar{A}} \subseteq \overline{\overline{G\cap A}}$ ⇒ $\boxed{\overline{G\cap\bar{A}} \subseteq \overline{G\cap A}}$

Επίσης, $G\cap A \subseteq G\cap\bar{A}$ άρα $\overline{G\cap A} \subseteq \overline{G\cap\bar{A}}$

Άρα $\overline{G\cap\bar{A}} = \overline{G\cap A}$

(iii) ⇒ i)) Εφαρμόζοντας την iii) για $A = X\setminus G$

έχουμε $\overline{G\cap \overline{X\setminus G}} = \overline{G\cap(X\setminus G)}$

$\overline{G\cap(X\setminus G^{\circ})} = \emptyset$

$\overline{G\setminus G^{\circ}} = \emptyset$ ⇒ $G\setminus G^{\circ} = \emptyset$ ⇒ $G \subseteq G^{\circ}$ ⇒ $G = G^{\circ}$ άρα G: ανοιχτό β) (X,ρ) μ.χ. $A, B \neq \emptyset$ κλειστά ξένα

$f: X \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \dfrac{\rho(x,A)}{\rho(x,A)+\rho(x,B)}$ Να δ.ο.

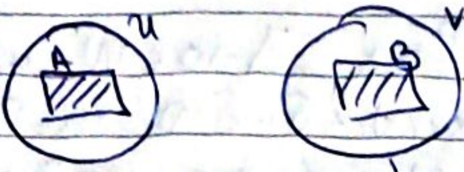
α) f καλά ορισμένη συνεχής $0 \leq f(x) \leq 1$ $\quad f(x)=0 \ \forall x \in A$

$f(x)=1 \ \forall x \in B$

β) Ν.δ.ο $\exists\, U, V$ ανοικτά ξένα υποσύνολα του X ώστε

$A \subseteq U$, $B \subseteq V$

Αποδ: α)



$h_1: X \to \mathbb{R}$

Η συνάρτηση $x \mapsto \rho(x,A)$

ορίζεται και είναι:

$h_2: X \to \mathbb{R}$ συνεχής

$x \mapsto \rho(x,B)$ ~~ορ~~ ορίζονται και ~~είναι~~ είναι συνεχείς:

Αν για κάποιο $x \in X$: $\rho(x,A)+\rho(x,B)=0$ τότε:

$\rho(x,A)=0$ και $\rho(x,B)=0$

A, B κλειστά: $x \in \bar{A}$ και $x \in \bar{B}$, $x \in A$ και $x \in B \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$ άτοπο

h_1, h_2 συνεχείς άρα h_1+h_2 συνεχής

άρα $\dfrac{h_1}{h_1+h_2}$ συνεχής δηλ. f συνεχής

Εφόσον $0 \leq \rho(x,A) \leq \rho(x,A)+\rho(x,B) \quad \forall x \in X$

$0 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x \in X$

Για $x \in A$ $\quad \rho(x,A)=0$ άρα $f(x)=0$

Για $x \in B$ $\quad \rho(x,B)=0$ άρα $f(x)=1$

β) Αν $U = f^{-1}\left((-\infty, \frac{1}{2})\right)$, $V = f^{-1}\left((\frac{1}{2}, +\infty)\right)$ τα U, V

είναι ανοικτά υποσύνολα του X (αντίστροφες εικόνες ανοικτών του $\mathbb{R}$ μέσω της συνεχούς f)

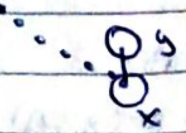
$U \cap V = \emptyset$

$A \subseteq U$

$B \subseteq V$

5) (X,ρ) μ.χ. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ~~...~~ ακολ. στο X, $x\in X$ $x_n \xrightarrow{\rho} x$. Να δ.ο το $A=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}\cup\{x\}$ είναι κλειστό.

Αποδ Για να δ.ο. το A είναι κλειστό αρκεί να δ.ο. το $X\setminus A$ είναι ανοικτό. Έστω $y\in X\setminus A$ τότε $y\neq x$ και $y\neq x_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ Θέτουμε $\delta=\frac{1}{2}\rho(x,y)$



Εφόσον $x_n \xrightarrow{\rho} x$ $\exists n_0\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n\geq n_0$ να ισχύει $\rho(x_n,x)<\delta$ δηλ. $x_n\in B_\rho(x,\delta)$
Έτσι, εφόσον $B_\rho(x,\delta)\cap B_\rho(y,\delta)=\emptyset$ για κάθε $n\geq n_0$ $x_n\notin B_\rho(y,\delta)$
Θέτουμε $\varepsilon=\min(\{\delta\}\cup\{\rho(y,x_i): i<n_0\})$ τότε $\varepsilon>0$

Τότε η $B_\rho(y,\varepsilon)$ δεν περιέχει το x, δεν περιέχει τα x_n $n\geq n_0$, δεν περιέχει τα x_n $n<n_0$.
Άρα $B_\rho(y,\varepsilon)\cap A=\emptyset$ δηλ. $B_\rho(y,\varepsilon)\subseteq X\setminus A$
Επομένως το $X\setminus A$ είναι ανοικτό

7) (X,ρ) μ.χ, $A,B\neq\emptyset$ Να δ.ο. $\rho(A,B)=\rho(\bar{A},\bar{B})$
Αποδ:
Εφόσον $A\subseteq\bar{A}$, $B\subseteq\bar{B}$, $\{\rho(x,y): x\in A, y\in B\}\subseteq\{\rho(x,y): x\in\bar{A}, y\in\bar{B}\}$
άρα $\inf\{\rho(x,y): x\in\bar{A}, y\in\bar{B}\}\leq\inf\{\rho(x,y)\ x\in A, y\in B\}$
$\rho(\bar{A},\bar{B})\leq\rho(A,B)$

Αρκεί νδο $\rho(A,B)\leq\rho(\bar{A},\bar{B})$. Αρκεί νδο $\rho(A,B)-\varepsilon\leq\rho(\bar{A},\bar{B})$ για κάθε $\varepsilon>0$

Εφόσον $\rho(\bar{A},\bar{B})=\inf\{\rho(x,y): x\in\bar{A}, y\in\bar{B}\}$
αρκεί νδο $\forall x\in\bar{A}$, $\forall y\in\bar{B}$ $\rho(A,B)-\varepsilon\leq\rho(x,y)$

Έστω $x \in \bar{A}$, $y \in \bar{B}$. Τότε $B_\rho(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A \neq \emptyset$ και $B_\rho(y, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B \neq \emptyset$. Άρα $\exists$ $x_1 \in A$ με $\rho(x, x_1) < \varepsilon/2$ και $\exists$ $y_1 \in B$ με $\rho(y, y_1) < \varepsilon/2$

Τότε: $\rho(A, B) \leq \rho(x_1, y_1) \leq \rho(x_1, x) + \rho(x, y) + \rho(y, y_1) <$
$< \frac{\varepsilon}{2} + \rho(x, y) + \frac{\varepsilon}{2}$

Άρα: $\rho(A, B) - \varepsilon \leq \rho(x, y)$ $\forall x \in \bar{A}$, $\forall y \in \bar{B}$
Όπως είπαμε στην αρχή αυτό έπεται ότι $\rho(A, B) - \varepsilon \leq \rho(\bar{A}, \bar{B})$, Αφού αυτό συμβαίνει $\forall$ $\varepsilon > 0$ έχουμε: $\rho(A, B) \leq \rho(\bar{A}, \bar{B})$

Επομένως $\rho(A, B) = \rho(\bar{A}, \bar{B})$

6) $x \in A' \Leftrightarrow x \in \overline{A \setminus \{x\}}$
ii) Το A είναι κλειστό

Αποδ: Από θεωρία $\bar{A} = A \cup A'$. A κλειστό $\Leftrightarrow \bar{A} = A$ $\Leftrightarrow A \cup A' = A \Leftrightarrow A' \subseteq A$

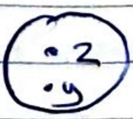
iii) $A \subseteq B \Rightarrow A' \subseteq B'$

Αποδ. Έστω $x \in A' \Rightarrow x \in \overline{A \setminus \{x\}}$. Εφόσον $A \subseteq B$ έχουμε $A \setminus \{x\} \subseteq B \setminus \{x\} \Rightarrow \overline{A \setminus \{x\}} \subseteq \overline{B \setminus \{x\}}$. Άρα $x \in \overline{B \setminus \{x\}} \Rightarrow x \in B'$, άρα $A' \subseteq B'$

iv) Για να δ.ο. A' κλειστό αρκεί να δ.ο. το $X \setminus A'$ είναι ανοικτό. Έστω $y \in X \setminus A'$. Εφόσον $y \notin A'$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B_\rho(y, \varepsilon) \cap A = \{ \emptyset$ ή $\{y\}$

Θα δ.ο. $B_\rho(y, \varepsilon) \subseteq X \setminus A'$. Έστω $z \in B_\rho(y, \varepsilon)$ (και θα δ.ο. $z \in X \setminus A'$)

α) Αν $z = y$ εφόσον $y \notin A'$ έχουμε $z \notin A'$



β) Αν $z \neq y$, τότε για $\delta = \min\{\rho(z,y), \varepsilon - \rho(z,y)\}$

Έχουμε ότι το σύνολο $B_\rho(z,\delta) \cap A$ δεν περιέχει το y και είναι υποσύνολο του $B_\rho(y,\varepsilon)$ άρα $B_\rho(z,\delta) \cap A = \emptyset$ άρα $z \notin A'$ δηλ. $z \in X \setminus A'$